

Meeresforschung im Computer - neue Einsichten mit Hilfe mathematischer Modelle

Sündermann, Jürgen

Veröffentlicht in:
Jahrbuch 1987 der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft, S.201-216



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Meeresforschung im Computer – neue Einsichten mit Hilfe mathematischer Modelle

Von **Jürgen Sündermann**, Universität Hamburg

1. Ein einführendes Beispiel

In den sechziger Jahren wurden im Atlantis II-Tief des Roten Meeres (etwa 22°N, mehr als 2000 m Wassertiefe, siehe Abb. 1) heiße Quellen und Lagerstätten von erzhaltigen Schlämmen entdeckt. Es entstand die Idee einer Gewinnung dieser mineralischen Rohstoffe. In Zusammenarbeit mehrerer Länder wurden eine Durchführbarkeitsstudie und eine Untersuchung zur möglichen Umweltbelastung angestellt. Insbesondere sollten dabei Aussagen zur langfristigen und großräumigen Ausbreitung rückgeleiteter Restschlämme aus der industriellen Aufbereitung an Land gewonnen werden.

Das vorhandene hydrographische Datenmaterial war sehr gering und inhomogen. Daher wurde das Institut für Meereskunde der Universität Hamburg mit der Erstellung eines dreidimensionalen mathematischen Modells zur Simulation von Zirkulation und Transport der Wassermassen im Roten Meer und deren saisonaler Variabilität betraut.

Einzelheiten dieses Modells können an dieser Stelle nicht wiedergegeben werden, es sei auf König (1982) verwiesen.

Abb. 2 zeigt ein typisches Ergebnis dieses Modells, nämlich die berechneten Oberflächenströmungen im Winter (Monat Januar). Das Bild dokumentiert den bekannten generellen nordgerichteten Einstrom aus dem Indischen Ozean. Es zeigt aber auch – und das war bis dahin unbekannt – ausgeprägte mesoskalige Strukturen wie Wirbel und Mäander. Diese sind mit starken Querströmungen verbunden, die für die Belastung des Ökosystems mit Schmutzfrachten offensichtlich eine starke Bedeutung haben. Besonders markant ist ein Wirbel von etwa 100–200 km Durchmesser, den das mathematische Modell etwa zwischen 19 und 20°N voraussagt.

Dieser Wirbel war bis dahin nicht beobachtet worden. Es wurde daher die Gelegenheit der Jungfernfahrt des indischen Forschungsschiffes SAGAR KANYA auf dem Wege von Travemünde nach Goa benutzt, um eine flächenhafte Vermessung in diesem Gebiet durchzuführen (siehe Abb. 1).

Ein erstes Ergebnis dieser Meßfahrt zeigt die Abb. 3. Die dort gezeichnete Tiefenlage der 23°C-Isotherme ist thermodynamisch äquivalent mit einem im Uhrzeigersinn drehenden Wirbel zwischen 18 und 19°N, also genau an der richtigen Stelle! Ein schöner Beweis für die Realitätsnähe und die prognostische Aussagekraft des Modells! Dazu muß gesagt werden, daß der Computerlauf einige hundert Mark gekostet hat, während ein Forschungsschiff Zehntausende von Mark pro Tag erfordert.

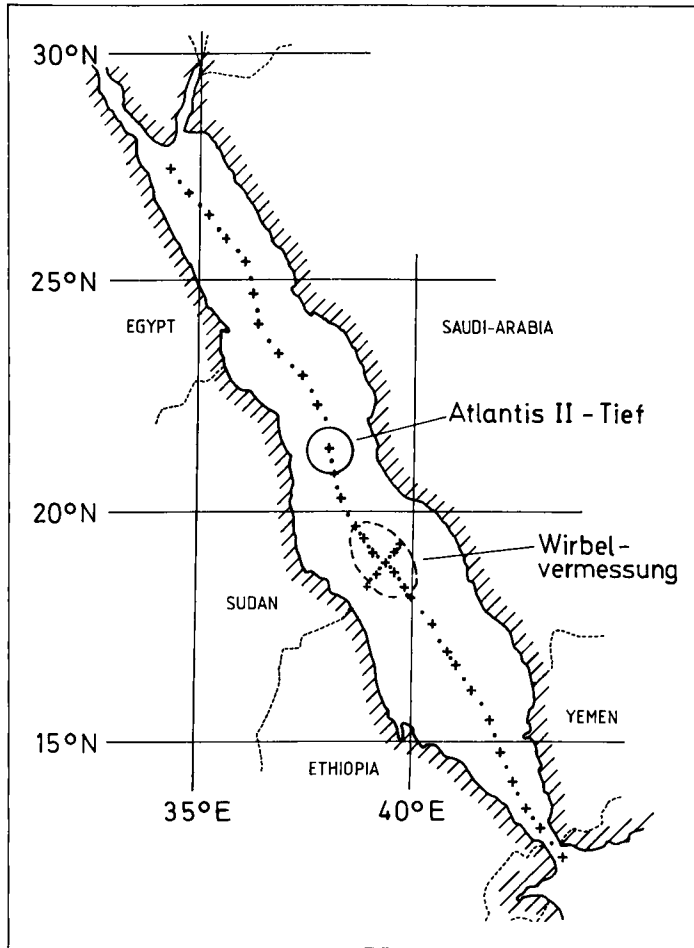


Abb. 1:

Karte des Roten Meeres mit Lage des Atlantis II-Tiefs und des Gebietes der Wirbelvermessung durch das indische Forschungsschiff SAGAR KANYA auf seiner Fahrt im Mai 1983. Die Meßpunkte sind markiert und bedeuten: • XBT (expendable bathythermograph), + CTD (automatische Sonde zur Messung von Salzgehalt, Temperatur und Druck), Wasserprobe.

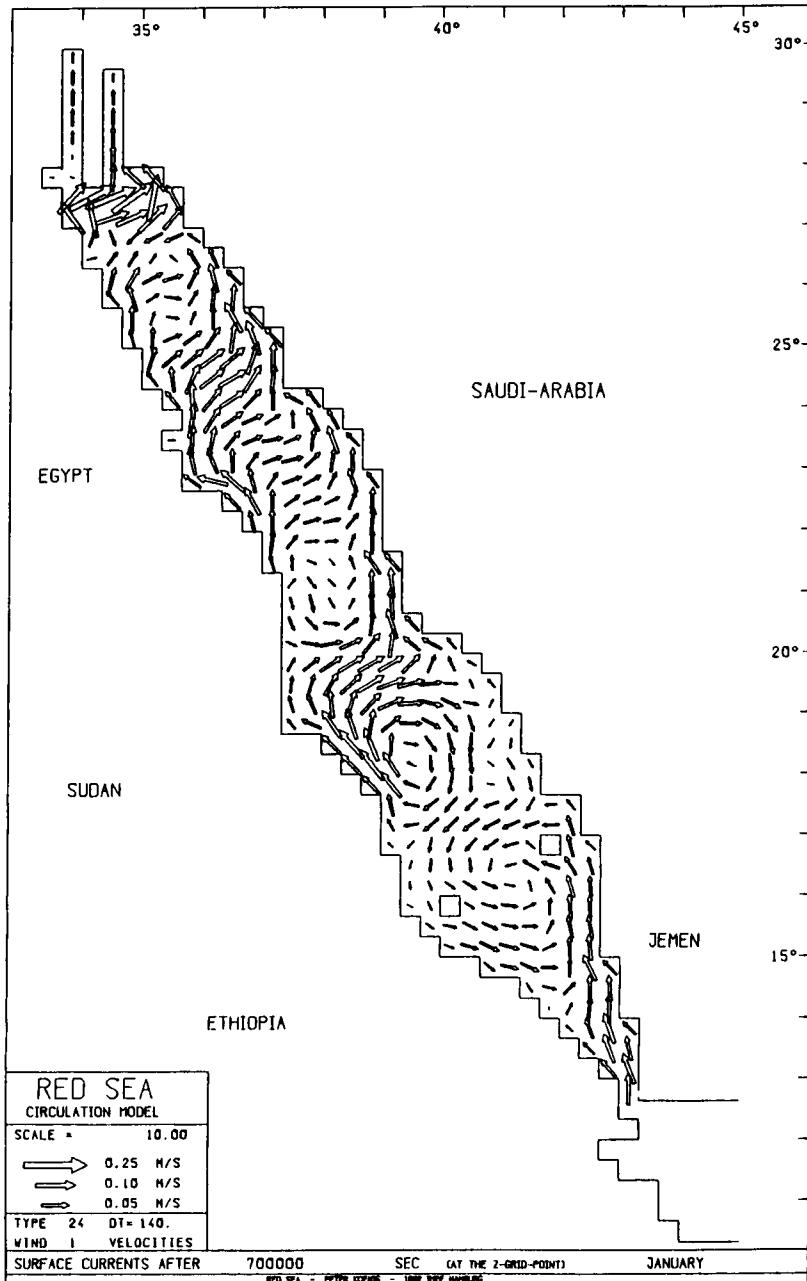


Abb. 2:

Berechnete Oberflächenströmungen des Roten Meeres im Monat Januar. Der horizontale Gitterabstand (Pfeilmittelpunkte) beträgt $1/3^\circ$.

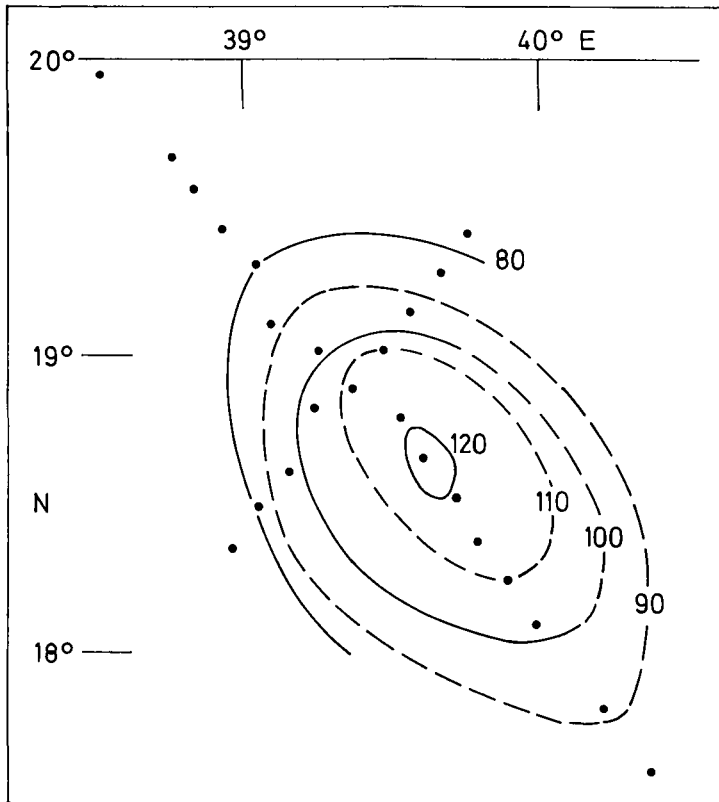


Abb. 3:

*Tiefenlage der 23°C-Isotherme in Metern für das Gebiet 18/19°N und 39/40°E des Roten Meeres.
Die Punkte markieren die Meßpositionen.*

2. Methoden der Meeresforschung

Das einführende Beispiel soll nun nicht besagen, daß der Computer die beobachtenden Methoden der Meeresforschung allmählich ganz ersetzen wird. Es soll aber zeigen, daß eine sinnvolle Synthese von Modellierung und Feldexperiment neue Einsichten bringt und die Effizienz wissenschaftlicher Arbeit erhöht.

Die moderne Meeresforschung umfaßt im wesentlichen drei Methoden

- die konventionelle Beobachtung mit Hilfe von Forschungsschiffen,
- die Fernerkundung der Meeresoberfläche mit Hilfe von Flugzeugen und Satelliten,
- die mathematische Simulation mit Hilfe von elektronischen Großrechenanlagen.

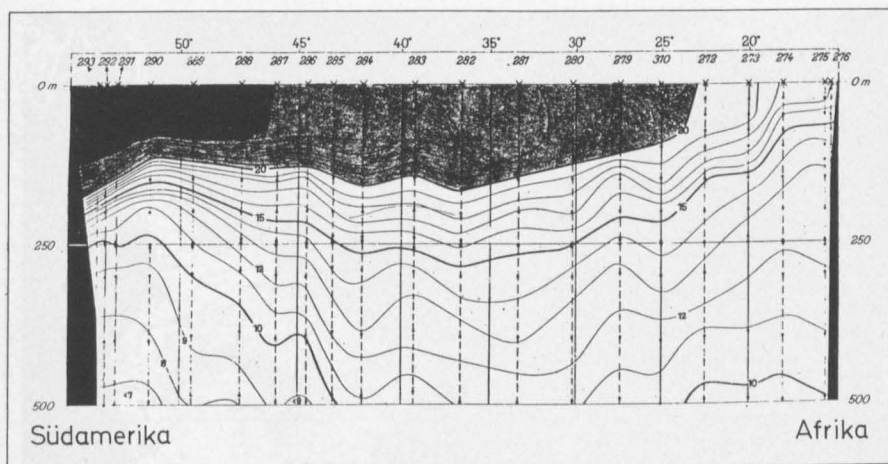


Abb. 4:

Vertikalschnitt der Temperatur in °C auf der Linie Guayana – Kapverdische Inseln – Afrikanische Küste (etwa 10°N). In der Abszisse sind geographische Grade (westliche Länge) sowie die laufende Nummer der Meßstation, in der Ordinate die Tiefe in Metern aufgetragen.

Im folgenden werden in drei Abbildungen drei Beispiele für typische Ergebnisse der Anwendung dieser drei Methoden gezeigt. Mit einiger Phantasie mag man daraus die unterschiedliche Arbeitsweise und den unterschiedlichen Aufwand ermessen.

Abb. 4 zeigt einen Vertikalschnitt der Temperaturverteilung im zentralen Atlantik, gewonnen auf der berühmten Expedition des Forschungsschiffes METEOR in den Jahren 1925–1927 (Defant 1981). Senkrechte Linien stellen eine Ankerstation des Schiffes dar und die Punkte darauf die einzelnen Meßpositionen. Das Bild ist nach eingehender Datenauswertung und -korrektur durch manuelle Interpolation entstanden.

In Abb. 5 ist ein Satellitenbild der Chlorophyllverteilung in der Deutschen Bucht wiedergegeben. Es zeigt eine flächendeckende Informationsfülle und einen Auflösungsgrad, wie sie von Schiffen nicht gewonnen werden können. Die erkennbaren kleinräumigen Strukturen sind erstmalig durch derartige Satellitenbilder gefunden worden. Die Sensoren messen allerdings die ozeanographischen Größen nur indirekt, und es sind umfangreiche Operationen notwendig, um die Rohdaten in marine Parameter umzusetzen. Zur Kalibration und Verifikation der Daten bleiben Schiffsmessungen notwendig (ground truth). Diese sind als Ergänzung umso notwendiger, als die Fernerkundung nur die Oberfläche erfaßt und kaum in die Tiefe eindringt.

Die Abb. 6 schließlich zeigt die berechnete Oberflächendeformation des Weltozeans infolge der halbtägigen Hauptmondzeit M_2 . Dieses Bild ist nur auf Grund der Kenntnis der astronomischen Kräfte und der natürlichen Tiefenverteilung des Weltozeans erstellt worden. Es ist nicht ein einziger Meßwert eingeflossen! Diese Detailliertheit und Informationsdichte ist mit konventionellen Beobachtungen niemals zu erreichen.

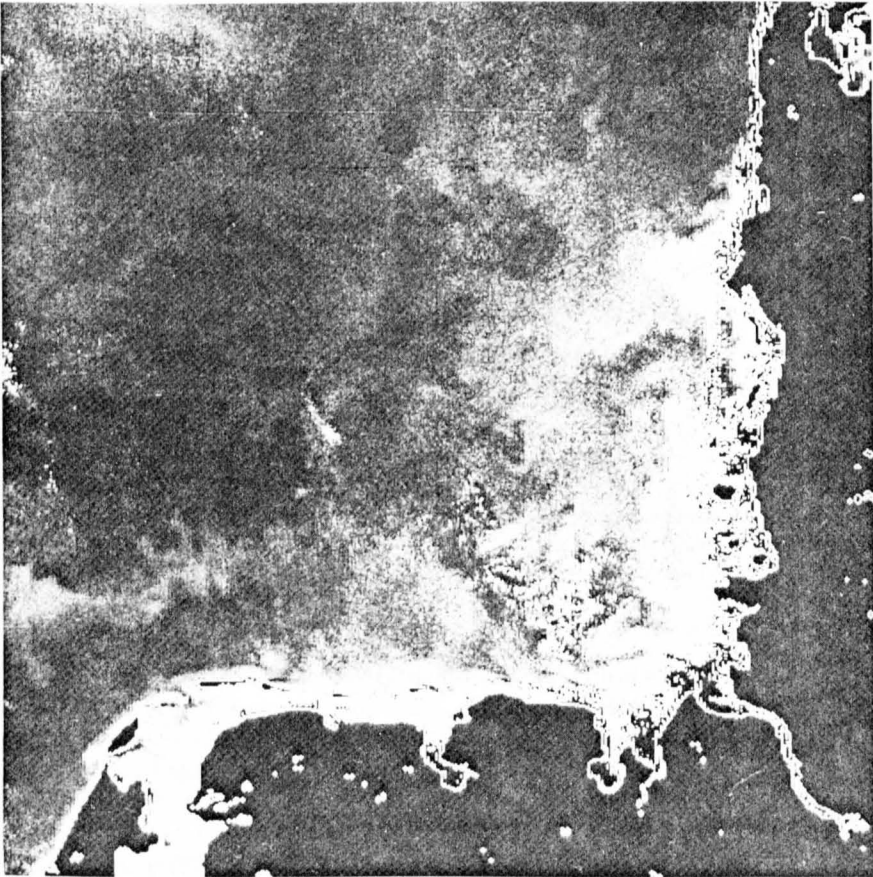


Abb. 5:

Chlorophyllverteilung in der Deutschen Bucht, gewonnen durch die Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt (DFVLR) aus Meßwerten des Coastal Zone Colour Scanner (CZCS) vom Juli 1979. Helle Schattierungen stellen hohe, dunkle niedrige Konzentrationen dar.

Allerdings sind auch hier für die Kalibration und die Verifikation des Modells Beobachtungsdaten erforderlich.

3. Mathematische Modelle in der Meeresforschung

Mathematische Modelle natürlicher oder technischer Vorgänge stützen sich auf die formelmäßige Beschreibung der fundamentalen Naturgesetze. Für die Meeresforschung sind das die grundlegenden Erhaltungsaxiome der Hydro- und Thermodynamik, die natürlich auch für den Ozean gelten müssen. Der physikalische Zustand des Meeres wird beschrieben durch die räumliche Verteilung und den zeitlichen Verlauf von sieben

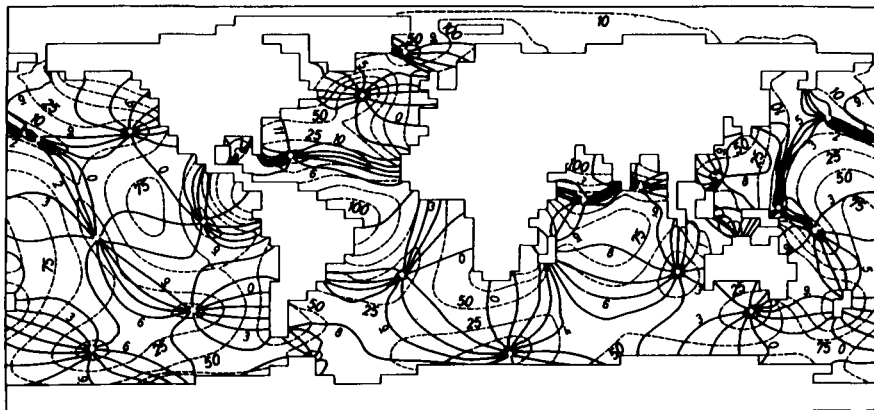


Abb. 6:

Berechnete halbtägige Hauptmondgezeit M_2 im Weltozean (Zahel 1978). Dargestellt sind die Linien gleicher Hochwassereintrittszeit (—) in Mondstunden (bezogen auf den Monddurchgang in Greenwich) und die Linien gleicher Amplitude (---) in Zentimetern. Der Gitterabstand beträgt 4° .

makroskopischen Variablen: Geschwindigkeitsvektor (drei Komponenten), Druck, Temperatur, Salzgehalt, Dichte. Ihre Bestimmung als Funktionen von Ort und Zeit kann – alternativ zu den klassischen Feldbeobachtungen – grundsätzlich durch die Lösung von sieben physikalischen Gleichungen erfolgen: drei Reynoldssche Bewegungsgleichungen (Ausdruck des Newtonschen Axioms von der Erhaltung des Impulses), Kontinuitätsgleichung (Erhaltung der Masse), Wärmeleitungsgleichung (Erhaltung der Energie), Salztransportgleichung (Erhaltung der Salzmasse), thermodynamische Zustandsgleichung. Mathematisch gesehen, handelt es sich dabei um nichtlineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Ihre Integration geht einher mit der Erfüllung von Randbedingungen; für den natürlichen Ozean bedeutet das die Vorgabe der beobachtenden Flüsse von Impuls, Masse und Wärme an den Grenzflächen des Systems, also z.B. des Windantriebs oder der Wärmestrahlung an der Meeresoberfläche.

Die zugrundeliegenden physikalischen Gleichungen sind mathematisch so kompliziert, insbesondere bei Berücksichtigung der natürlichen Geometrie der Ozeane, daß sie nicht analytisch gelöst werden können. Sie werden daher numerisch (näherungsweise) behandelt, und an dieser Stelle entfalten die modernen Großrechner ihre segensreiche Wirkung. Numerische Verfahren setzen i.a. eine Diskretisierung des zu untersuchenden Meeresgebietes voraus, d.h. eine abstrakte Repräsentation durch endlich viele Gitterpunkte oder Teilbereiche. Bekannteste Lösungstechniken sind das Differenzenverfahren (z.B. Mesinger & Arakawa 1976), die Methode der finiten Elemente (z.B. Zienkiewicz 1971), das Monte-Carlo-Verfahren (z.B. Maier-Reimer 1973). Einige Probleme der Meeresforschung, wie z.B. der globale Wärmetransport durch energiereiche mesoskalige Wirbel, erfordern dabei den Einsatz der größten heute verfügbaren Computer.

Eine grundsätzliche Schwierigkeit mathematischer Modelle resultiert aus der in der Natur stattfindenden Wechselwirkung verschiedenskaliger Vorgänge, die bis zur gegenseitigen (und nicht vernachlässigbaren) Beeinflussung mikroskopischer turbulenter Prozesse und der globalen Zirkulation reicht. Obwohl also physikalisch geboten, ist es doch praktisch weder wünschenswert noch machbar, in einem diskreten Modell alle diese Skalen gleichermaßen aufzulösen. Folglich fallen die kleinräumigen, gleichwohl wichtigen Prozesse wie etwa die turbulente Vermischung zweier Wasserkörper „durchs Gitter“. Man hilft sich damit, diese Prozesse zu „parametrisieren“, d.h. ohne sie im einzelnen nachzubilden, durch einen pauschalen Parameter mit dem großräumigen Feld zu koppeln. Beispiele solcher Parameter sind der Windschubkoeffizient, der Bodenreibungskoeffizient usw. Diese Größen sind keine Materialeigenschaften, sondern vom Strömungszustand abhängig; sie sind theoretisch nicht eindeutig zu bestimmen, sondern sie müssen empirisch durch Anpassung des Modells an Beobachtungsdaten gewonnen werden („Kalibration“). Eine gute Parametrisierung sollte vom einzelnen Datensatz unabhängig sein („universelle Konstanten“); sie sollte sich auch bei neuen Feldexperimenten bewähren („Verifikation“).

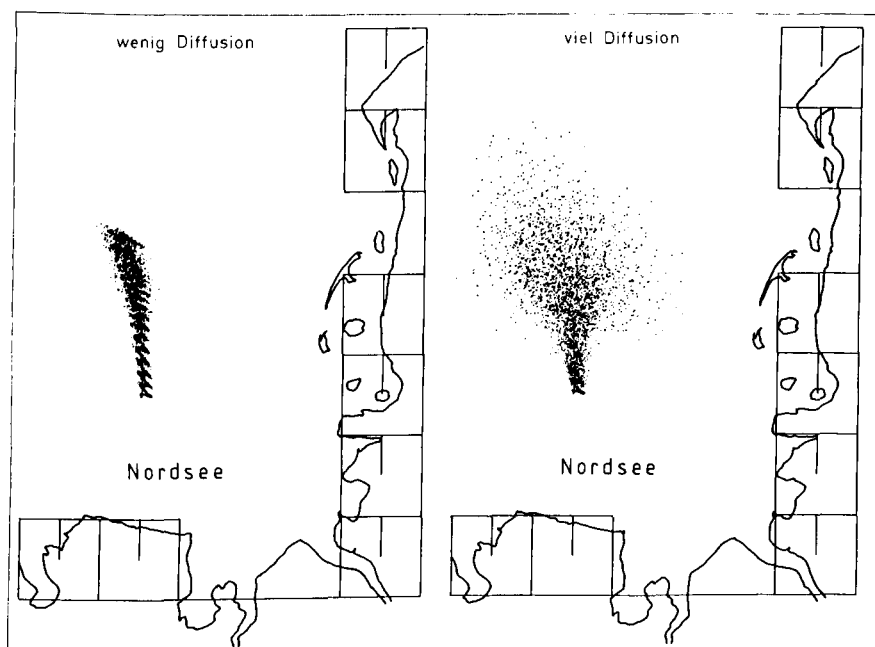


Abb. 7:

Berechnete Ausbreitung einer im Wasser gelösten konservativen Substanz in der Deutschen Bucht unter dem Einfluß von M_2 -Gezeit und Wind (NW 14 m/s) innerhalb von 20 Tagen. Im Falle links wurde ein konstanter Diffusionskoeffizient angenommen, im rechten Bild dagegen ein mit der Zeit anwachsender Diffusionskoeffizient (Maier-Reimer 1973).

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Wahl einer geeigneten Parametrisierung sind numerische Sensitivitätsstudien. Hier werden modellhaft Ansätze und Zahlenwerte variiert, um deren Auswirkung auf das großräumige Feld der Zustandsgrößen systematisch zu studieren. Der Vergleich mit Beobachtungen ergibt dann entscheidende Aufschlüsse über die Allgemeingültigkeit der Parametrisierung und über die richtige Wahl der empirischen Konstanten.

Die Abb. 7 zeigt ein typisches Ergebnis einer solchen Sensitivitätsstudie: die Ausbreitung einer eingebrachten Substanz im Meer bei Annahme eines kleinen und eines großen Diffusionskoeffizienten.

4. Beispiele für neue Einsichten durch Modellsimulation

Daß mathematische Modelle in der Meeresforschung quantitativ neuartige Ergebnisse bringen, ist offensichtlich. Daß mit ihrer Hilfe aber auch qualitativ neue Einsichten gewonnen werden, soll an Hand von drei Beispielen gezeigt werden:

- M_2 -Gezeit des heutigen Weltozeans
- M_2 -Gezeit des Weltozeans im Perm-Zeitalter
- Schadstoffausbreitung in der Nordsee.

Diese Erkenntnisse gründen sich auf die Fähigkeit der Modelle,

- hochauflösend und raumdeckend auch Gebiete zu erfassen, die aus logistischen Gründen kaum zugänglich sind;
- verschiedenartige Vorgänge, die sich in der Natur immer gegenseitig überdecken, künstlich zu trennen und damit in ihrer Kausalität zu verstehen;
- prognostische Simulationen zu gestatten, d. h. eindeutige Ergebnisse auch für Szenarios zu liefern, die von den gegenwärtigen Bedingungen signifikant abweichen und daher nicht beobachtet werden können.

Die Abb. 8 zeigt die berechneten Phasen (Hochwassereintrittszeiten) der M_2 -Tide entlang der afrikanischen Atlantikküste im Vergleich zu Pegelbeobachtungen (Zahel 1978). Es werden zwei Modellversionen betrieben: eine ohne und eine mit Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen den Gezeiten des Meeres und der festen Erde. Letztere trägt der elastischen Deformation des Meeresbodens unter dem Einfluß des Gezeitenpotentials des Mondes und der Auflast durch die ozeanischen Gezeitenberge sowie der Änderung des Gravitationsfeldes durch die Verschiebung von Wassermassen Rechnung. Es zeigt sich, daß durch die Berücksichtigung dieses Effektes die Modellergebnisse systematisch und signifikant verbessert werden. Die Sekundäranregung der Meeresgezeiten „von unten“ bewirkt eine Phasenänderung von $30-60^\circ$ (1 bis 2 Stunden). Wir lernen aus dem Beispiel, daß die ozeanischen Gezeiten durch die Wechselwirkung mit der festen Erde wesentlich mitgeformt werden, eine Erkenntnis, wie sie aus Beobachtungen allein nicht zu gewinnen wäre.

Für die Rekonstruktion der Erdgeschichte, die Interpretation geologischer Daten, Deutung der variablen Erdrotation ist die Frage der Meeresströmungen und -gezeiten

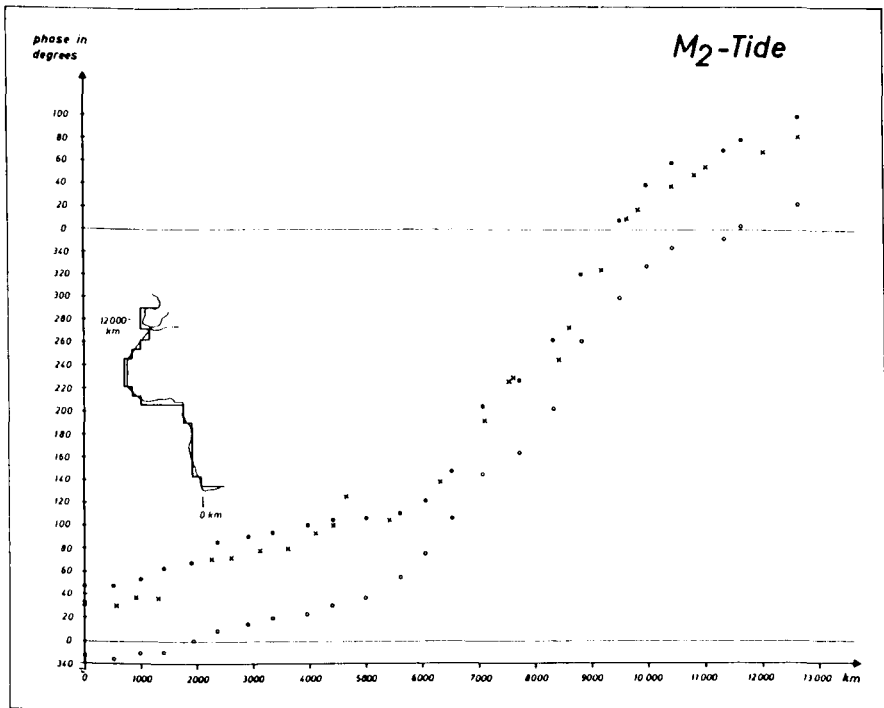


Abb. 8:

Berechnete und beobachtete Phasen (Hochwassereintrittszeiten) der halbtägigen Hauptmondgezeit M_2 entlang der Küste des Ostatlantiks von Kapstadt bis Lissabon (Zahel 1978)

- Modell ohne Berücksichtigung von tidal loading und ocean self-attraction
- Modell mit Berücksichtigung von tidal loading und ocean self-attraction
- x Pegelbeobachtungen

Die Phasen beziehen sich auf den Monddurchgang in Greenwich.

früherer Erdzeitalter von Bedeutung. Hier bieten mathematische Modelle die einzige umfassende Möglichkeit, weltweit Informationen zu bekommen. Voraussetzung ist die ungefähre Kenntnis der globalen Tiefenverteilung und des äußeren Antriebs. Hinreichende bathymetrische Daten liegen etwa bis zum Kambrium (500 Mio. Jahre zurück) vor. Die gezeitenerzeugenden Kräfte sind aus der Himmelsmechanik genau bekannt. Der atmosphärische Antrieb dagegen läßt sich aus geologischen Daten nur für die jüngere Erdgeschichte (einige zehntausend bis einige Millionen Jahre) einigermaßen rekonstruieren; für ältere Zeiten müssen auch für die Lufthülle Modellrechnungen angestellt werden.

Abb. 9 zeigt die berechneten Amplituden und Phasen der M_2 -Gezeit für den Ozean des Oberen Perm, 250–230 Mio. Jahre zurück (Sündermann 1978). In dieser Formation gab es einen einzigen großen Kontinent, die Pangaea, und entsprechend einen

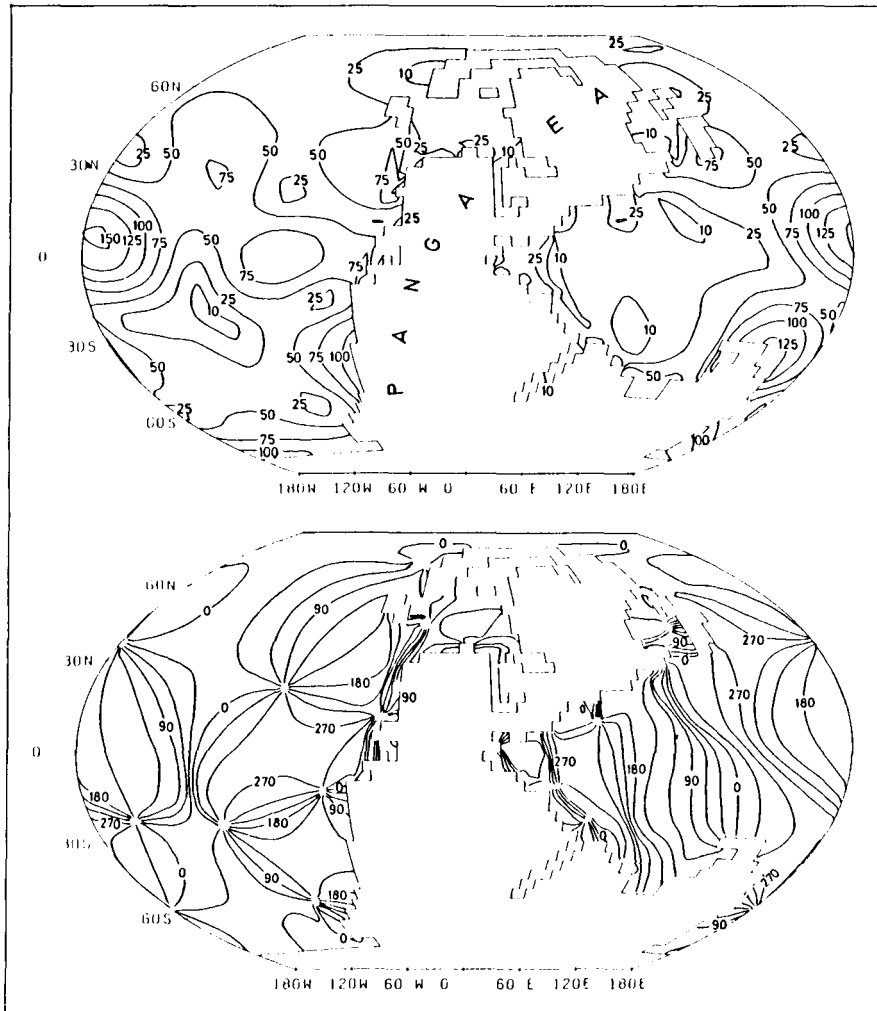


Abb. 9:

Berechnete Amplituden (cm; oberes Bild) und Phasen (Grad, bezogen auf den Monddurchgang durch den 0°-Meridian; unteres Bild) der halbtägigen Hauptmondflut für den Ozean des Oberen Perm, 250–230 Mio. Jahre zurück (Sündermann 1978). Die paläogeographischen Karten gründen sich auf Dietz & Holden (1970).

weltumspannenden Ozean. Die Gezeitenamplituden unterscheiden sich nicht signifikant von den heutigen. Diese Berechnung trug dazu bei, die aus Wachstumsrhythmen fossiler Korallen und Muscheln abgeleitete Verlangsamung der Erdrotation zu bestätigen.

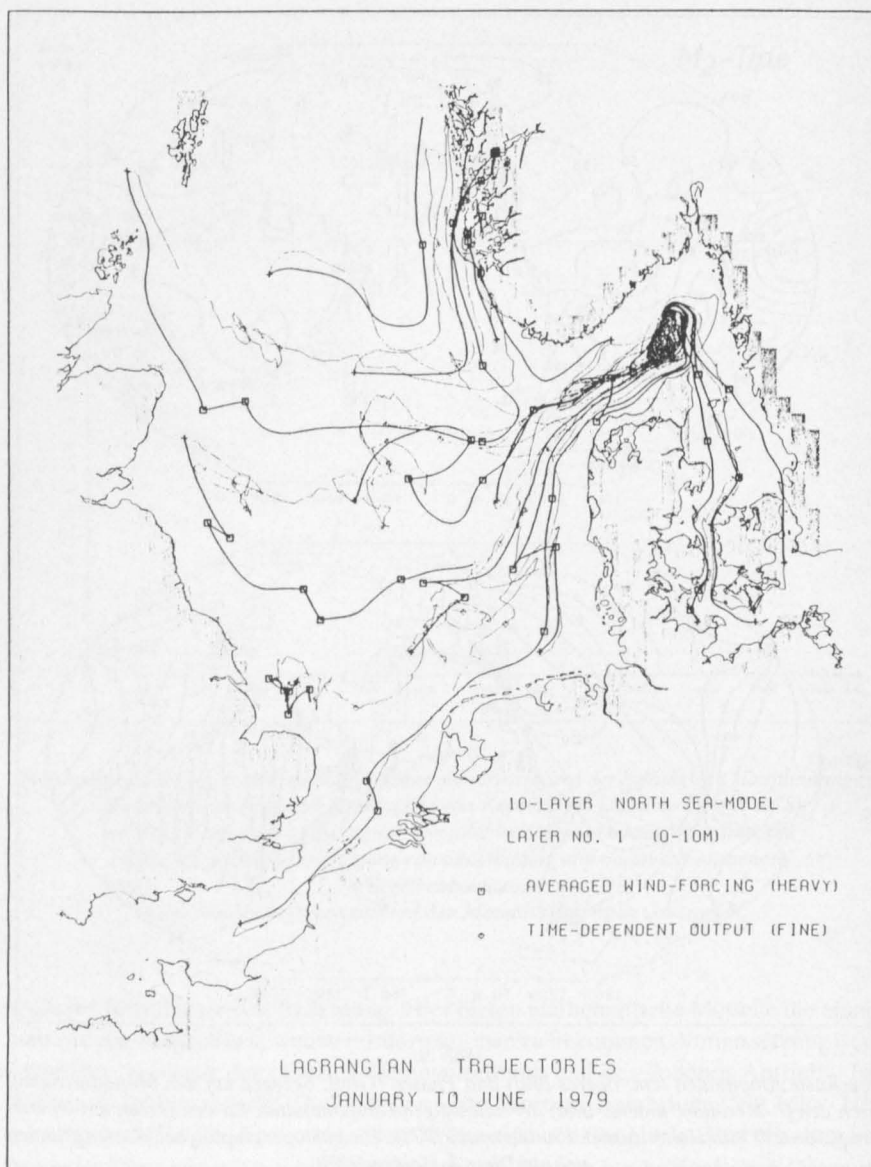


Abb. 10:

Berechnete (Lagrangesche) Trajektorien für oberflächennahe Wasserteilchen der Nordsee für den Zeitraum Januar bis Juni 1979 (Backhaus 1985). Die dicken Linien gelten für Monatsmittelwerte, die dünnen für die aktuelle Situation (Windinformation alle 6 Stunden). Beide Kurven beginnen jeweils gemeinsam im Ausgangspunkt der Teilchenwanderung.

Das letzte Kapitel schließlich betrifft die aktuelle Schadstoffproblematik der Nordsee. Die Beurteilung des Belastungszustandes und die Planung von Schutzmaßnahmen erfolgt durchweg auf der Basis von Schiffsdaten. Diese geben jedoch, und zwar sehr lückenhaft, immer nur einen Momentanzustand der Nordsee wieder, der angesichts der hohen meteorologischen Variabilität keineswegs repräsentativ sein muß. So werden in den seltensten Fällen, zeitlich oder räumlich aufgelöst, Spitzenbelastungen registriert werden. Diese aber sind gerade der limitierende Faktor für das Ökosystem

Die Bandbreite der natürlichen Variabilität ist erst durch mathematische Modellstudien deutlich geworden. Abb.10 zeigt die berechneten Trajektorien verschiedener

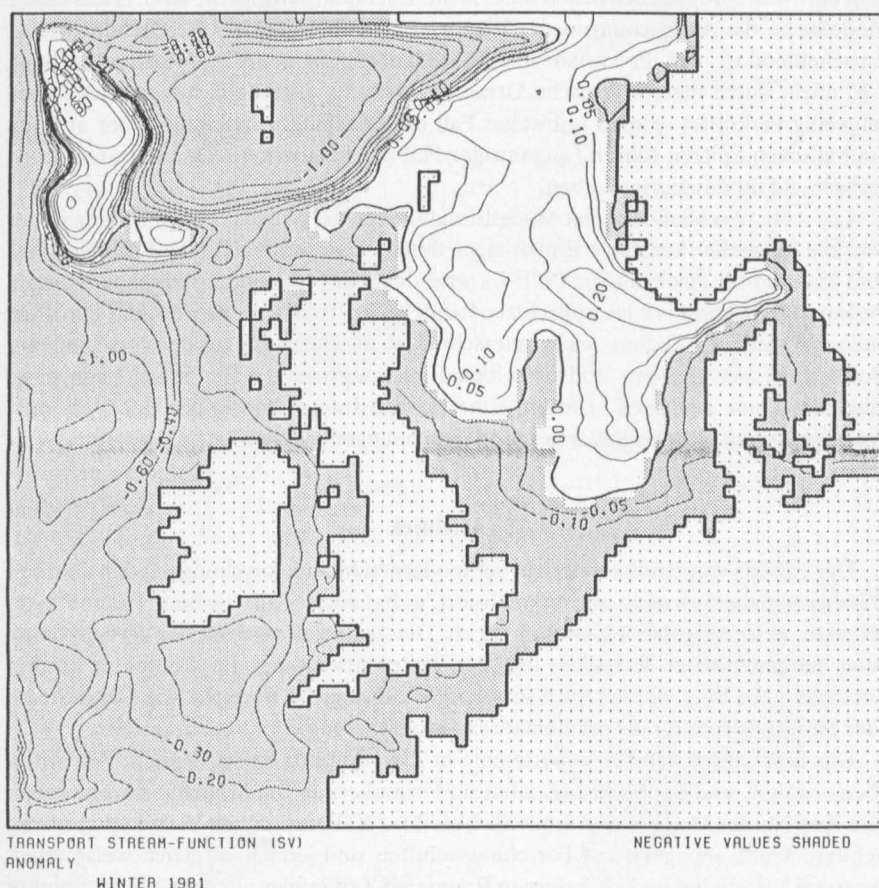


Abb.11:

Berechnete Anomalie (Abweichung vom langjährigen Mittel) der Wassermassentransporte in der Nordsee für den Winter 1981 (Hainbucher et al. 1986). Dargestellt sind Stromlinien in Sverdrup (1 Sv = 1 Mio. m³/s). Der Wassermassentransport zwischen zwei Linien entspricht der Differenz der Sv-Werte. Negative Werte sind schattiert.

oberflächennaher Wasserteilchen für die meteorologischen und hydrodynamischen Bedingungen des ersten Halbjahres 1979 (Backhaus 1985).

Für ein- und denselben Startpunkt der Wasserpartikel sind jeweils die Ausbreitungswege für mittlere Verhältnisse und die aktuelle Situation angegeben. Man sieht, daß die Verdriftungen der Wassermassen und damit die Konzentrationsverteilungen ganz erheblich voneinander abweichen können. Eine Bewertung von Schadstoffdaten kann daher immer nur an Hand synoptischer Strömungsfelder der ganzen Nordsee erfolgen; diese sind nur durch Modellrechnungen zu erhalten.

In einer systematischen Studie haben Hainbucher et al. (1986) die Varianz der Wassermassentransporte auf Grund des transienten meteorologischen Antriebs über dem nordwesteuropäischen Schelf untersucht. Exemplarisch gibt die Abb. 11 aus dieser Modellserie die Abweichungen des Winters 1981 vom mittleren Geschehen wieder. Entscheidend ist, daß die Varianz in der Größenordnung der Mittelwerte selbst liegt, d.h. allein durch meteorologische Ursachen kann die Grundbelastung der Nordsee zeitweilig verkräftet werden (günstiger Fall des „flushing“), zeitweilig aber auch zu dramatischen Spitzen führen (ungünstiger Fall der Stagnation). Der letztere Fall ist maßgebend für das marine Leben.

Die Abb. 12 schließlich zeigt Modellsimulationen der Schadstoffausbreitung in der Nordsee für zeitlich konstante Einleitungen durch Flüsse, einmal für das Frühjahr 1980, zum anderen für das Frühjahr 1981. Es wird dabei angenommen, daß es sich um im Wasser gelöste konservative Substanzen handelt. Das Bild demonstriert klar die allein meteorologisch bedingten sehr unterschiedlichen Belastungsgrade verschiedener Nordseeregionen bei ein- und derselben Einleitungsmenge. Ein Schiff kann diese Situationen nur punktuell erfassen. Eine richtige Interpretation der Beobachtungsdaten ist nur mit Hilfe begleitender Modellrechnungen möglich.

5. Ausblick

Der Einsatz von Großrechnern in der modernen Meeresforschung hat den marinen Wissenschaftsbetrieb nicht nur rationalisiert, er hat auch qualitativ neue Erkenntnisse gebracht, neue Aufgabenfelder erschlossen. Dieser Prozeß wird mit der Vervollkommenung mathematischer Techniken und der Weiterentwicklung der Computer künftig fortschreiten. Dabei werden auch schwieriger zugängliche Bereiche wie Ökosysteme oder Stoffkreisläufe für die mathematische Modellierung erschlossen werden.

Das heißt nicht, daß Feldexperimente in Zukunft entbehrlich würden. Wie schon oben erwähnt, sind Beobachtungsdaten zur Formulierung von Modellansätzen, weiter zum Antrieb der Modelle und schließlich zu ihrer Kalibration und Verifikation unverzichtbar. Meßkampagnen mit Forschungsschiffen sind jedoch vergleichsweise teuer, logistisch aufwendig, und sie liefern in Raum und Zeit immer nur sehr eingeschränkte Informationen. Wie schon heute, werden sie erst recht in der Zukunft sehr eng mit Modellrechnungen kombiniert werden. Diese inter- und extrapolieren in objektiver Weise die lückenhaften Beobachtungsdaten, sie ergeben globale Aussagen, sie gestatten auch prognostische Simulationen. So können mit dem Computer Expeditionen

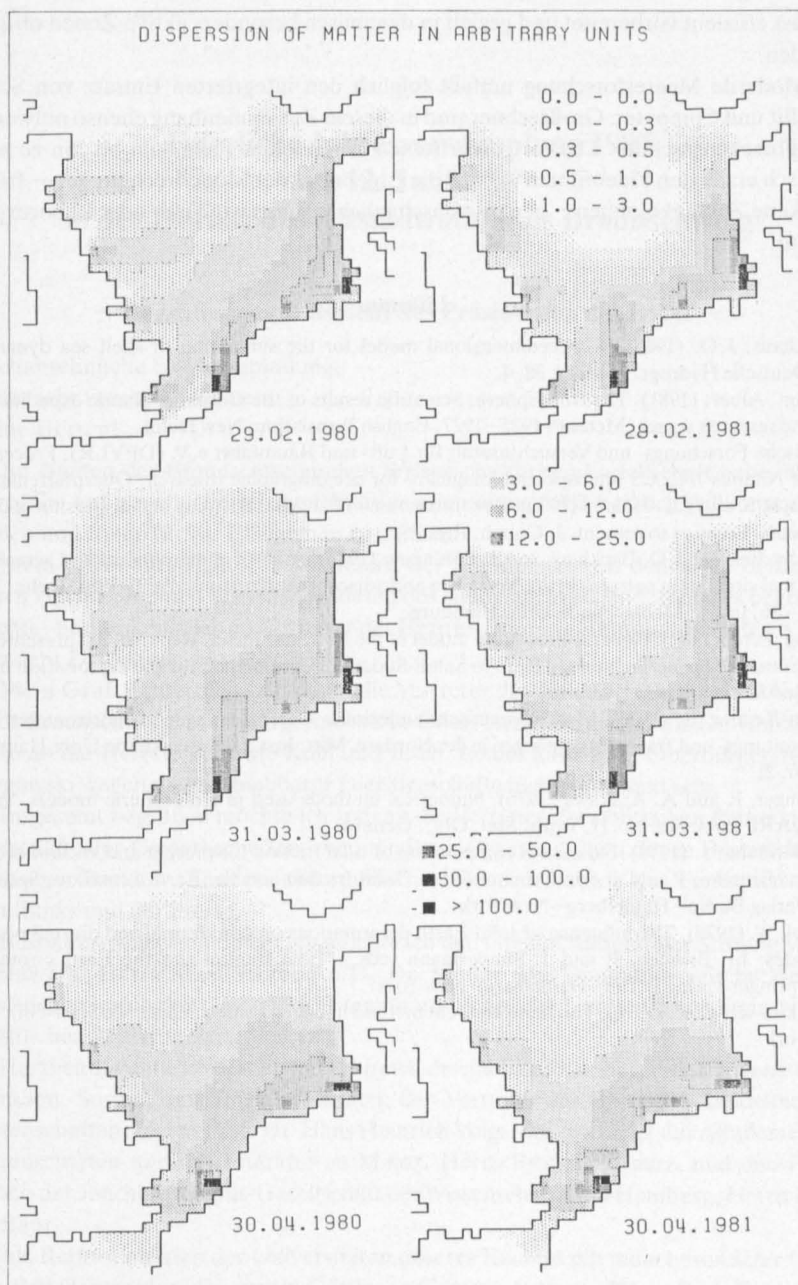


Abb. 12:

Berechnete Schadstoffausbreitung in der Nordsee für eine passive, konservative Substanz bei Einleitung durch die Flüsse. Die linke Versuchsreihe zeigt die Konzentrationen für das aktuelle Windfeld des Frühjahrs 1980, die rechte für dasjenige des Frühjahrs 1981. Die Graustufen kennzeichnen relative Einheiten (Backhaus, persönliche Mitteilung).

höchst effizient vorbereitet und gezielt in dynamisch besonders aktive Zonen dirigiert werden.

Moderne Meeresforschung umfaßt folglich den integrierten Einsatz von Schiff, Satellit und Computer. Großrechner sind in diesem Zusammenhang ebenso notwendig wie Forschungsschiffe. Die fortgeschrittenen graphischen Techniken bis hin zu automatisch erzeugten Videofilmen werden die Ergebnisse der Modellrechnungen – früher trockene Zahlenkolonnen – genauso anschaulich machen wie Feld- oder Laborexperimente.

Literatur

- Backhaus, J. O. (1985). A threedimensional model for the simulation of shelf sea dynamics. Deutsche Hydrogr. Zeitschr. 38, 4.
- Defant, Albert (1981). The troposphere. Scientific results of the German Atlantic expedition of the research vessel „Meteor“ 1925–1927, English Translation, New Delhi.
- Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt e.V. (DFVLR), Processing of Nimbus 7/CZCS multispectral imagery for oceanographic research, Oberpfaffenhofen.
- Dietz, R. S. and J. C. Holden (1970). Reconstruction of Pangaea: Breakup and dispersion of continents, Permian to present. J. Geoph. Res. 75.
- Hainbucher, D., J. O. Backhaus and T. Pohlmann (1986). Atlas of climatological and actual seasonal circulation patterns in the North Sea and adjacent shelf regions: 1969–1981. Techn. Rep. 1–86, Inst. f. Meereskunde Univ. Hamburg.
- König, Peter (1982). General circulation model of the Red Sea. Techn. Rep. No. 38, presented by Preussag Marine Technology Dep. to Saudi-Sudanese Commission for the exploitation of the Red Sea resources, Hannover.
- Maier-Reimer, E. (1973). Hydrodynamisch-numerische Untersuchungen zu horizontalen Ausbreitungs- und Transportvorgängen in der Nordsee. Mitt. Inst. f. Meereskunde Univ. Hamburg Nr. 21.
- Mesinger, F. and A. Arakawa (1976). Numerical methods used in atmospheric models. Vol. I. GARP Publ. Ser. No. 17, World Met. Org., Geneva.
- Sündermann, J. (1978). Numerical computation of tidal friction for present and ancient oceans. In: Brosche, P. and J. Sündermann (eds.). Tidal friction and the Earth's rotation, Springer-Verlag Berlin–Heidelberg–New York.
- Zahel, W. (1978). The influence of solid Earth deformations on semidiurnal and diurnal oceanic tides. In: Brosche, P. and J. Sündermann (eds.). Tidal friction and the Earth's rotation, Springer-Verlag Berlin–Heidelberg–New York.
- Zienkiewicz, O. C. (1971). The finite element method in engineering science, McGraw-Hill, New York.